

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИSOLUTION OF NON-LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS
IN PARTIAL WITH THREE VARIABLES

Аннотация: Рассмотрено применение метода дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя переменными. Начальные задачи для таких систем уравнений сведены к системам интегральных уравнений.

Abstract: The application of the additional argument method for a system of non-linear partial differential equations with three variables is concerned. Initial tasks for this kind of equations system are reduced to systems of integral equations.

Ключевые слова: Система дифференциальных уравнений в частных производных, нелинейное уравнение, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.

Key words: system of partial differential equations, non-linear equation, method of additional argument, Cauchy task, contracting mappings principle

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a_1(t, x, y, z, \mathcal{G}_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_2(t, x, y, z, \mathcal{G}_2) \frac{\partial u_1}{\partial y} + a_3(t, x, y, z, \mathcal{G}_3) \frac{\partial u_1}{\partial z} = f_1(t, x, y, z, u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + a_1(t, x, y, z, \mathcal{G}_1) \frac{\partial u_2}{\partial x} + a_2(t, x, y, z, \mathcal{G}_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_3(t, x, y, z, \mathcal{G}_3) \frac{\partial u_2}{\partial z} = f_2(t, x, y, z, u_1, u_2, u_3) \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + a_1(t, x, y, z, \mathcal{G}_1) \frac{\partial u_3}{\partial x} + a_2(t, x, y, z, \mathcal{G}_2) \frac{\partial u_3}{\partial y} + a_3(t, x, y, z, \mathcal{G}_3) \frac{\partial u_3}{\partial z} = f_3(t, x, y, z, u_1, u_2, u_3) \end{cases} \quad (1)$$

$$(t, x, y, z) \in G_4(T) = [0, T] \times R^3$$

$$u_i(0, x, y, z) = \varphi_i(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3, \quad (x, y, z) \in R^3, \quad (2)$$

где функция $\mathcal{G}_i(t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ неизвестная функция из множества неизвестных функций $\{u_1(t, x, y, z), u_2(t, x, y, z), u_3(t, x, y, z)\}$.

В работе [1] рассмотрен случай уравнения с двумя переменными.

Пусть $\mathcal{G}_i(t, x_1, \dots, x_n) = u_{4-i}(t, x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, 3$.

Используем обозначения классы функций, приведённые в работах [2-3]:

$\bar{C}^{\alpha_1, \dots, \alpha_l}$ – класс функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_j по j -му аргументу, $j = 1, 2, 3$ на некотором подмножестве Ω евклидова пространства R^3 , мульти индекс $(0, 0, 0)$ будем опускать.

$Lip(N|_u, M|_v, \dots)$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменной u с коэффициентом N , по переменной v с коэффициентом M, \dots ; для функции одной переменной индекс будем опускать.

ТЕОРЕМА. Пусть для $i = 1, 2, 3$ функции $\varphi_i(x, y, z) \in \bar{C}^{1,1,1}(R^3)$, $a_i(t, x, y, z, \mathcal{G}_i) \in \bar{C}^{0,1,1,1,1}(G_4(T) \times R)$, $f_i(t, x, y, z, u_1, u_2, u_3) \in \bar{C}^{0,1,1,1,1,1}(G_4(T) \times R^3)$.

Тогда существует такое $0 \leq T^* \leq T$, явно определяемое на основе исходных данных, что задача (1), (2) имеет единственное ограниченное решение в $G_4(T^*)$.

Доказательство. В классе $\bar{C}^{1,1,1}(G_4(T^*))$ задача (1), (2) с $p_i(s, t, x, y, z)$ - определяемые из

$$\frac{\partial p_i(s, t, x, y, z)}{\partial s} = a_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2(s, t, x, y, z), p_3(s, t, x, y, z), u_{4-i}(s, p_1, p_2, p_3)), \quad (3)$$

$$p_1(t, t, x, y, z) = x, \quad p_2(t, t, x, y, z) = y, \quad p_3(t, t, x, y, z) = z, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(s, t, x, y, z) \in Q_5(T) = \{0 \leq s \leq t \leq T, x \in R^3\};$$

эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(t, x, y, z) = \varphi_i(p_1(0, t, x, y, z), p_2(0, t, x, y, z), p_3(0, t, x, y, z)) + \\ + \int_0^t f_i(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_{4-i}(v, p_1, p_2, p_3), u_2, u_3) dv, \\ p_1(s, t, x, y, z) = x - \int_s^t a_1(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_3(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \\ p_2(s, t, x, y, z) = y - \int_s^t a_2(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_2(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \\ p_3(s, t, x, y, z) = z - \int_s^t a_3(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_1(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \\ i = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (4)$$

В самом деле, из (3) следует (4) и нижеследующие равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)}{\partial s} &= \frac{\partial u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)}{\partial t} + \\ &+ a_1(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3, u_3(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)) \times \frac{\partial u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)}{\partial x} + \\ &+ a_2(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3, u_2(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)) \times \frac{\partial u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)}{\partial y} + \\ &a_3(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3, u_1(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)) \times \frac{\partial u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2, p_3)}{\partial z} \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, 3.$$

На основании последнего соотношения из (1) имеем

$$\begin{aligned} u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_3, p_3) &= \varphi_i \left(x - \int_0^t a_1(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2, p_3, u_3(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \right. \\ &y - \int_s^t a_2(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_2(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \\ &z - \int_s^t a_3(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2(v, t, x, y, z), p_3(v, t, x, y, z), u_1(v, p_1, p_2, p_3)) dv \left. \right) + \\ &+ \int_0^s f_i(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2, p_3, u_1(v, p_1, p_2, p_3), u_2, u_3) dv, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (5)$$

которое при $s = t$ совпадает с (4).

С другой стороны, из (4) для $p_i(s, t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$. следует

$$\frac{\partial p_i(s, t, x, y, z)}{\partial t} + a_1(t, x, y, z, u_3(t, x, y, z)) \frac{\partial p_i(s, t, x, y, z)}{\partial x} + a_2(t, x, y, z, u_2(t, x, y, z)) \frac{\partial p_i(s, t, x, y, z)}{\partial y} + a_3(t, x, y, z, u_1(t, x, y, z)) \frac{\partial p_i(s, t, x, y, z)}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$p_1(t, t, x, y, z) = x, \quad p_2(t, t, x, y, z) = y, \quad p_3(t, t, x, y, z) = z, \quad i = 1, 2, 3.$$

Определяя из (4) частные производные по t и по x, y и z , с учетом (6) получаем (1).

Введя новые обозначения

$$\omega_i(s, t, x, y, z) = u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2(s, t, x, y, z), p_3(s, t, x, y, z)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

из (4) и (5) получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\omega_i(s, t, x, y, z) = \varphi_i(p_1(0, t, x, y, z), p_2(0, t, x, y, z), p_3(0, t, x, y, z)) + \int_0^s f_i(\rho, p_1(\rho, t, x, y, z), p_2(\rho, t, x, y, z), p_3(\rho, t, x, y, z), \omega_1(\rho, t, x, y, z), \omega_2, \omega_3) d\rho, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

$$p_1(s, t, x, y, z) = x - \int_s^t a_1(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2, p_3, \omega_3(v, p_1, p_2, p_3)) dv,$$

$$p_2(s, t, x, y, z) = y - \int_s^t a_2(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2, p_3, \omega_2(v, p_1, p_2, p_3)) dv, \quad (9)$$

$$p_3(s, t, x, y, z) = z - \int_s^t a_3(v, p_1(v, t, x, y, z), p_2, p_3, \omega_1(v, p_1, p_2, p_3)) dv,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Пусть для $i = 1, 2, 3$ функции

$\omega_i(s, t, x, y, z) = u_i(s, p_1(s, t, x, y, z), p_2(s, t, x, y, z), p_3(s, t, x, y, z))$, где $u_i(t, x, y, z)$ являются решениями задачи (1), (2), а $p_i(s, t, x, y, z)$ - решениями задачи (3), где они удовлетворяют систему интегральных уравнений (8), (9) и наоборот, если функции $\omega_i(s, t, x, y, z)$, $p_i(s, t, x, y, z)$ являющиеся решениями системы интегральных уравнений (8), (9) и непрерывно дифференцируемы по всем своим аргументам, то в пределах некоторого интервала изменения переменной t , определяемого на основе исходных данных, $\omega_i(s, t, x, y, z)$ при $s = t$, будет удовлетворять системе уравнений (1) и начальному условию (2).

В самом деле, функции $u_i(t, x, y, z)$, $p_i(s, t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ являются решениями задач (1), (2) и (3). Они удовлетворяют равенства (4). Используя обозначения (6), приходим к системе интегральных уравнений вида (8) и (9).

Напротив, пусть непрерывно дифференцируемые функции

$\omega_i(s, t, x, y, z)$, $p_i(s, t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ обращают систему интегральных уравнений (8) и (9) в тождество.

Обозначим

$$W_i(s, t, x, y, z) = \frac{\partial \omega_i(s, t, x, y, z)}{\partial t} + a_1(t, x, y, z, \omega_3(t, x, y, z)) \frac{\partial \omega_i(s, t, x, y, z)}{\partial x} +$$

$$a_2(t, x, y, z, \omega_2(t, x, y, z)) \frac{\partial \omega_i(s, t, x, y, z)}{\partial y} + a_3(t, x, y, z, \omega_1(t, x, y, z)) \frac{\partial \omega_i(s, t, x, y, z)}{\partial z},$$

$i = 1, 2, 3$.

Непосредственным дифференцированием из (8), имеем $W=0$.

Кроме этого, из (8) вытекает, что $\frac{\partial \omega_i}{\partial s} = f_i$.

С учетом отмеченных фактов, подставляя $\omega_i(t, t, x, y, z) = u_i(t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ в (1) и (2), убеждаемся, что во всем интервале изменения t , на котором $W=0$, $\omega_i(t, t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют начальной задаче (1), (2).

Теперь запишем систему интегральных уравнений (8) и (9) в виде одного векторного равенства

$$\theta = A\theta, \quad (10)$$

в котором $\theta = (\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_0^3, \theta_1^1, \theta_1^2, \theta_1^3)$ - вектор-функция переменных (s, t, x, y, z) ,

компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i = p_i(s, t, x, y, z)$

$\theta_1^i = \omega_i(s, t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3$, а компоненты оператора $A = (A_0^1, A_0^2, A_0^3, A_1^1, A_1^2, A_1^3)$

определяются равенствами:

$$A^i \theta = \varphi_i(\theta_0^1(0, t, x, y, z), \theta_0^2(0, t, x, y, z), \theta_0^3(0, t, x, y, z)) +$$

$$+ \int_0^s f_i(\rho, \theta_0^1(\rho, t, x, y, z), \theta_0^2(0, t, x, y, z), \theta_0^3(0, t, x, y, z), \theta_1^1(\rho, t, x, y, z), \theta_1^2(0, t, x, y, z), \theta_1^3(0, t, x, y, z)) d\rho,$$

$$A_0^1 \theta = x - \int_s^t a_1(v, \theta_0^1(\rho, t, x, y, z), \theta_0^2(0, t, x, y, z), \theta_0^3(0, t, x, y, z), \theta_1^1(v, t, x, y, z)) dv,$$

$$A_0^2 \theta = y - \int_s^t a_2(v, \theta_0^1(\rho, t, x, y, z), \theta_0^2(0, t, x, y, z), \theta_0^3(0, t, x, y, z), \theta_1^2(v, t, x, y, z)) dv,$$

$$A_0^3 \theta = z - \int_s^t a_3(v, \theta_0^1(\rho, t, x, y, z), \theta_0^2(0, t, x, y, z), \theta_0^3(0, t, x, y, z), \theta_1^3(v, t, x, y, z)) dv.$$

Теперь, покажем, что уравнение (9) имеет в области $Q_5(T)$ при $T < T^*$ единственное

непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|\theta - \tilde{\theta}\| \leq M$, где

$$\|\theta\| = \max_{0 \leq i \leq 3} \max_{(t, x) \in Q_5(T)} \{|\theta_i|\}, \quad i = 1, 2, 3\}.$$

Имеем при $t \leq T^* \leq T$: $\|A^i \theta - \varphi_i\| \leq \|f_i\|_{Q_5(T)} T$,

$$\|A_0^1 \theta - x\| \leq \|a_1\|_{Q_5(T)} T, \quad \|A_0^2 \theta - y\| \leq \|a_2\|_{Q_5(T)} T, \quad \|A_0^3 \theta - z\| \leq \|a_3\|_{Q_5(T)} T$$

Оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(\tilde{\theta}, M)$.

Справедливы следующие оценки:

$$\|A_0^i \theta^1 - A_0^i \theta^2\| \leq \left(\sum_{k=1}^3 L_k^i + K^i \right) T \|\theta^1 - \theta^2\|,$$

$$\|A_i \theta^1 - A_i \theta^2\| \leq \Omega_i(T) \|\theta^1 - \theta^2\|,$$

где $\Omega_i(T) = \left\| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right\| + \sum_{k=1}^n (M_k^i + N_k^i)T,$

$f_i(t, x, y, z, u_1, u_2, u_3) \in Lip(M_1^i|_x, M_2^i|_y, M_3^i|_z, N_1^i|_{u_1}, N_2^i|_{u_2}, N_3^i|_{u_3}),$

$a_i(t, x, y, z, u_1) \in Lip(L_1^i|_x, L_2^i|_y, L_3^i|_z, K^i|_{u_1}), \quad i = 1, 2, 3,$

$M_j^i > 0 - const, N_j^i > 0 - const, L_j^i > 0 - const, j = 0, 1, 2, 3.$

Отсюда следует, что оператор A при

$$T < T^* = \min \{ 1/\|a_i\|; 1/\|f_i\|; M / (\sum_{k=1}^3 L_k^i + K^i); T_*^i \},$$

где T_i^* – корень уравнения $\Omega_i(T) = M, \quad i = 1, 2, 3$

осуществляет сжатое отображение шара $S(\tilde{\theta}, M)$ на себя.

Следовательно, по принципу сжимающих отображений уравнение (10) имеет одно и только одно решение.

Теорема доказана.

Литература:

1. Аширбаева А.Ж., Мамбетов Ж.И. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и математические науки в современном мире. 2017.-№1(48). -С.61-67.
2. Мамбетов Ж.И. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. –№5. – С. 87–90.
3. Мамбетов Ж.И. Исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ЖАГУ. – Жалал-Абад, 2016. – № 1(32). -С. 34–37.